

Filtry analogowe

Opracowanie: Zbigniew Kulesza

Literatura: U. Tietze, Ch. Schenk „Układy Półprzewodnikowe”, rozdział 14, WNT

1. Parametry opisujące filtry:
 - a) charakterystyka amplitudowo – częstotliwościowa:
 - przebieg w zakresie przepustowym (występowanie falistości)
 - ostrość załamania przy częstotliwości granicznej f_g
 - stromość opadania w zakresie zaporowym
 - b) odpowiedź jednostkowa
 - przerost (oscylacyjność odpowiedzi)
 - czas narastania (narastanie sygnału wyjściowego od 10% do 90% wartości ustalonej)
 - czas opóźnienia (narastanie sygnału wyjściowego od 0% do 50% wartości ustalonej)
2. Podstawowe typy filtrów
 - a) o tłumieniu krytycznym
 - b) Butterwortha
 - charakterystyka częstotliwościowa płaska o ostrym załamaniu przy f_g
 - odpowiedź jednostkowa o znacznych oscylacjach wzrastających z rzędem filtru
 - c) Czebyszewa
 - charakterystyka amplitudowa odznaczająca się falistością o stałej amplitudzie z bardzo ostrym załamaniem przy f_g (załamanie tym bardziej ostre, im większa falistość – rząd filtru)
 - odpowiedź jednostkowa o oscylacjach większych niż w filtrach Butterwortha
 - d) Bessela
 - charakterystyka częstotliwościowa płaska, ostrość załamania większa niż dla filtru z tłumieniem krytycznym, a mniejsza niż Butterwortha i Czebyszewa
 - odpowiedź jednostkowa o niewielkim przeroście (mniej niż 1%), minimalne oscylacje
 - optymalny do przenoszenia impulsów prostokątnych dzięki spełnianiu warunku stałości opóźnienia grupowego w dużym zakresie częstotliwości (przesunięcie fazowe proporcjonalne do częstotliwości)

Stromość opadania w zakresie zaporowym jest proporcjonalna do rzędu filtru.

Czasy narastania nie zależą silnie od typu i rzędu filtru i wynoszą w przybliżeniu $1/(3f_g)$.

Czasy opóźnienia i przerost rosną z wzrostem rzędu filtru, z wyjątkiem filtru Bessela, w którym przerost maleje powyżej rzędu czwartego.

3. Podstawy teoretyczne konstrukcji filtrów

- a) funkcja przenoszenia – postać ogólna dla filtru dolnoprzepustowego

$$K_u(S) = \frac{k_{u0}}{\prod_i (1 + a_i S + b_i S^2)}$$

gdzie

$S = s/\omega_g$ – znormalizowana częstotliwość zespolona

a_i, b_i – rzeczywiste dodatnie współczynniki

k_{u0} – wzmocnienie filtru dla pasma przepustowego

Rząd filtru jest równy najwyższej potędze S .

Nieparzyste rzędy realizujemy przez podstawienie $b_1=0$.

Korzystając z zależności $s = j\omega + \sigma$ dla $\sigma=0$ otrzymujemy:

$$S = \frac{j\omega}{\omega_g} = j \frac{f}{f_g} = j\Omega$$

Postać ogólna wzoru na funkcję przenoszenia umożliwia otrzymanie nie tylko biegunów rzeczywistych, ale i zespolonych. Oznacza to konieczność stosowania biernych obwodów RLC albo aktywnych obwodów RC (szczególnie w zakresie małych częstotliwości).

Ponadto wielomian jest od razu rozłożony na czynniki – fizyczna realizacja filtrów polega zatem na szeregowym połączeniu ogniwo o rzędzie co najwyżej drugim. Istnieje wiele znanych standardowych ogniwo o rzędzie drugim - tzw. sekcji bikwadratowych (najprostsza realizacja to układ Sallen-Keya).

- b) dobroć biegunów Q_i definiujemy jako

$$Q_i = \frac{\sqrt{b_i}}{a_i}$$

- c) charakterystyka częstotliwościowa modułu

$$|K_u|^2 = \frac{k_{u0}^2}{\prod_i [1 + (a_i^2 - 2b_i)\Omega^2 + b_i^2\Omega^4]}$$

- d) przesunięcie fazowe

$$\varphi = -\sum_i \arctg \frac{a_i\Omega}{1 - b_i\Omega^2}$$

- e) opóźnienie grupowe (czas, o który zostaje opóźniony sygnał)

$$T_{gr} = \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{a_i(1 + b_i\Omega^2)}{1 + (a_i^2 + 2b_i)\Omega^2 + b_i^2\Omega^4}$$

- f) transformacja filtru dolnoprzepustowego na górnoprzepustowy
Wykonujemy następujące operacje w dziedzinie częstotliwości

- częstotliwość graniczna pozostaje bez zmian
- zastępujemy S przez $1/S$
- zastępujemy Ω przez $1/\Omega$
- k_{u0} przechodzi w $k_{u\infty}$

Zatem

$$K_u(S) = \frac{k_{u\infty}}{\prod_i \left(1 + \frac{a_i}{S} + \frac{b_i}{S^2}\right)}$$

W dziedzinie czasu podobnej transformacji nie można dokonać.

- g) transformacja filtru dolnoprzepustowego na pasmowoprzepustowy
Wykonujemy następujące podstawienie

$$S = \frac{1}{\Delta\Omega} \left(S + \frac{1}{S}\right)$$

Transformacja powoduje podwojenie rzędu filtru.

Otrzymana w skali logarytmicznej charakterystyka jest symetryczna względem częstotliwości środkowej $\Omega=1$ i ma dolną częstotliwość graniczną $\Omega_{\min}=1/\Omega_{\max}$. Znormalizowaną szerokość pasma (trzydecybelową) $\Delta\Omega=\Omega_{\max}-\Omega_{\min}$ wybieramy dowolnie, przy czym $\Omega_{\max}\Omega_{\min}=1$. Funkcja przenoszenia dla drugiego rzędu ma postać

$$K_u(S) = \frac{(k_r/Q)S}{1 + \frac{1}{Q}S + S^2}$$

Dobroć filtru wynosi

$$Q = \frac{f_r}{B} = \frac{f_r}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{1}{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}} = \frac{1}{\Delta\Omega}$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymujemy znormalizowane częstotliwości graniczne:

$$\Omega_{\max/\min} = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta\Omega)^2 + 4} \pm \frac{1}{2} \Delta\Omega$$

- h) transformacja filtru dolnoprzepustowego na pasmowozaporowy
Stosujemy następujące podstawienie

$$S = \frac{\Delta\Omega}{S + \frac{1}{S}}$$

Charakterystyka jest symetryczna względem $\Omega=1$, przy czym oczywiście moduł w tym punkcie dąży do 0. Funkcja przenoszenia dla filtru drugiego rzędu ma postać

$$K_u(S) = \frac{k_{u0}(1 + S^2)}{1 + \Delta\Omega S + S^2}$$

- i) filtry wszechprzepustowe
Charakteryzują się stałą amplitudą w funkcji przenoszenia, ale powodują przesunięcie fazowe zależne od częstotliwości. Stosowane są do opóźniania sygnałów.
Funkcja przenoszenia przyjmuje postać

$$K_u(S) = \frac{\prod_i (1 - a_i S + b_i S^2)}{\prod_i (1 + a_i S + b_i S^2)}$$

Współczynniki a i b należy tu jednak przeliczyć, by dla $\Omega=1$ opóźnienie grupowe zmniejszyło się do $1/\sqrt{2}$ wartości dla małych częstotliwości (pojęcie 3dB częstotliwości granicznej nie ma tu zastosowania).

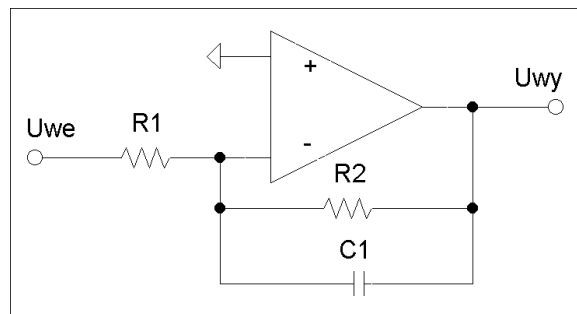
4. Realizacja filtrów

- a) filtr dolnoprzepustowy pierwszego rzędu
Funkcja przenoszenia

$$K_u(S) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \omega_g R_2 C_1 S}$$

Określamy k_{u0} , pojemność C_1 i stąd

$$R_2 = \frac{a_1}{2\pi f_g C_1} \quad R_1 = -\frac{R_2}{k_{u0}}$$

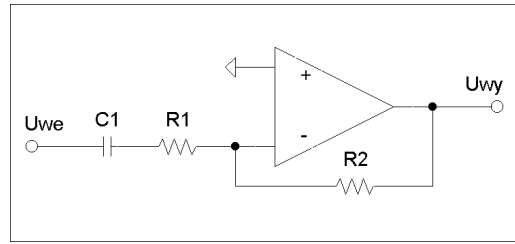


- b) filtr górnoprzepustowy pierwszego rzędu
Funkcja przenoszenia

$$K_u(S) = - \frac{R_2/R_1}{1 + \frac{1}{\omega_g R_1 C_1} * \frac{1}{S}}$$

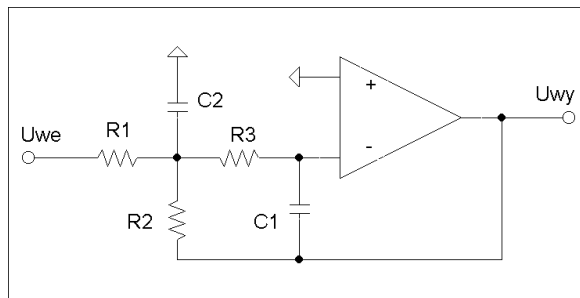
Określamy $k_{u\infty}$ oraz C_1 i stąd

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_g a_1 C_1} \quad R_2 = -R_1 k_{u\infty}$$



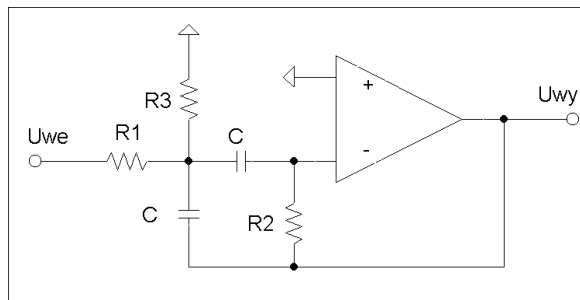
- c) filtr dolnoprzepustowy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym
Dla postaci ogólnej funkcji przenoszenia filtra dolnoprzepustowego otrzymujemy następujące wartości współczynników

$$k_{u0} = -\frac{R_2}{R_1} \quad a_1 = \omega_g C_1 \left(R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) \quad b_1 = \omega_g^2 C_1 C_2 R_2 R_3$$



- d) filtr pasmowoprzepustowy z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym
Korzystając ze wzoru na funkcję przenoszenia dla filtra pasmowoprzepustowego drugiego rzędu z punktu 3.g) otrzymujemy :

licznik	mianownik	mianownik
współczynnik przy S	współczynnik przy S	współczynnik przy S ²
$-\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_r$	$\frac{2R_1 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_r$	$\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3} C^2 \omega_r^2$

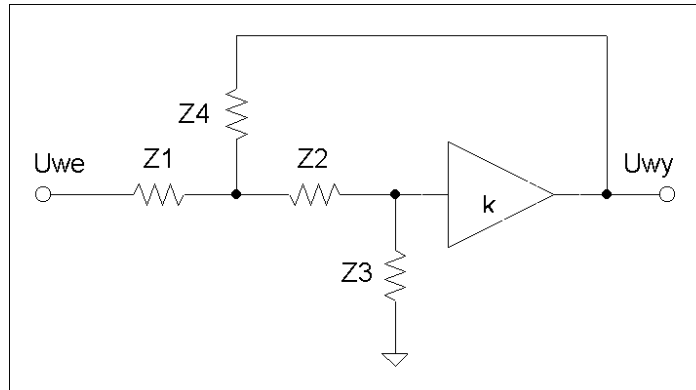


e) układ Sallen-Key'a

Zaletą układu Sallen-Key'a jest bardzo mała liczba elementów zewnętrznych, wadą – zależność parametrów od wzmacnienia. Przykładowe konfiguracje elementów dla różnych typów filtrów:

- filtr dolnoprzepustowy: $Z_1=R, Z_2=R, Z_3=C, Z_4=C$
- filtr górnoprzepustowy: $Z_1=C, Z_2=C, Z_3=R, Z_4=R$
- filtr pasmowoprzepustowy: $Z_1=C, Z_2=R, Z_3=C, Z_4=R$

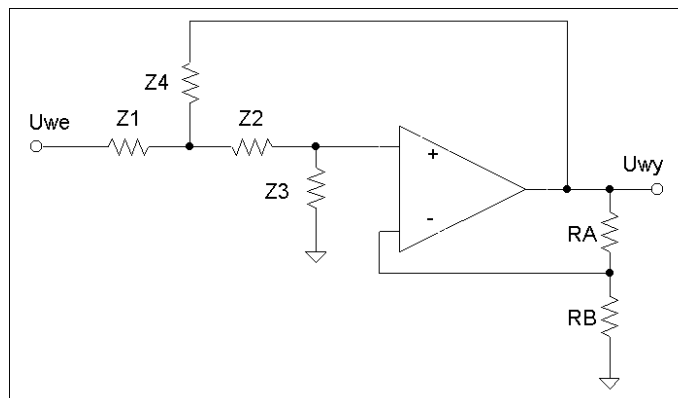
Schemat ogólny sekcji Sallen-Key'a:



Funkcja przenoszenia dla schematu ogólnego sekcji Sallen-Key'a:

$$K_u(S) = \frac{k_{u0}}{1 + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_4} \left(\frac{Z_2}{Z_3} + 1 - k_{u0} \right)}$$

Realizacja praktyczna z użyciem wzmacniacza operacyjnego:



W układzie jak na rysunku powyżej $k_{u0} = RA/RB + 1$.

Dla wzmacniacza pracującego jako wtórnik napięciowy funkcja przenoszenia upraszcza się do postaci pozwalającej na szybki dobór rodzaju elementów w zależności od typu filtru:

$$K_u(S) = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}$$

Dodatek 3. Współczynniki dla różnych typów filtrów

n	i	a_i	b_i	f_{q1}/f_q	Q_i
<i>Filtry z tłumieniem krytycznym</i>					
1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,2872	0,4142	1,000	0,50
3	1	0,5098	0,0000	1,961	—
	2	1,0197	0,2599	1,262	0,50
4	1	0,8700	0,1892	1,480	0,50
	2	0,8700	0,1892	1,480	0,50
5	1	0,3856	0,0000	2,593	—
	2	0,7712	0,1487	1,669	0,50
	3	0,7712	0,1487	1,669	0,50
6	1	0,6999	0,1225	1,839	0,50
	2	0,6999	0,1225	1,839	0,50
	3	0,6999	0,1225	1,839	0,50
7	1	0,3226	0,0000	3,100	—
	2	0,6453	0,1041	1,995	0,50
	3	0,6453	0,1041	1,995	0,50
	4	0,6453	0,1041	1,995	0,50
8	1	0,6017	0,0905	2,139	0,50
	2	0,6017	0,0905	2,139	0,50
	3	0,6017	0,0905	2,139	0,50
	4	0,6017	0,0905	2,139	0,50
9	1	0,2829	0,0000	3,534	—
	2	0,5659	0,0801	2,275	0,50
	3	0,5659	0,0801	2,275	0,50
	4	0,5659	0,0801	2,275	0,50
	5	0,5659	0,0801	2,275	0,50
10	1	0,5358	0,0718	2,402	0,50
	2	0,5358	0,0718	2,402	0,50
	3	0,5358	0,0718	2,402	0,50
	4	0,5358	0,0718	2,402	0,50
	5	0,5358	0,0718	2,402	0,50
<i>Filtry Bessela</i>					
1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,3617	0,6180	1,000	0,58
3	1	0,7560	0,0000	1,323	—
	2	0,9996	0,4772	1,414	0,69
4	1	1,3397	0,4889	0,978	0,52
	2	0,7743	0,3890	1,797	0,81
5	1	0,6656	0,0000	1,502	—
	2	1,1402	0,4128	1,184	0,56
	3	0,6216	0,3245	2,138	0,92
6	1	1,2217	0,3887	1,063	0,51
	2	0,9686	0,3505	1,431	0,61
	3	0,5131	0,2756	2,447	1,02
7	1	0,5937	0,0000	1,684	—
	2	1,0944	0,3395	1,207	0,53
	3	0,8304	0,3011	1,695	0,66
	4	0,4332	0,2381	2,731	1,13
8	1	1,1112	0,3162	1,164	0,51
	2	0,9754	0,2979	1,381	0,56
	3	0,7202	0,2621	1,963	0,71
	4	0,3728	0,2087	2,992	1,23
9	1	0,5386	0,0000	1,857	—
	2	1,0244	0,2834	1,277	0,52
	3	0,8710	0,2636	1,574	0,59
	4	0,6320	0,2311	2,226	0,76
	5	0,3257	0,1854	3,237	1,32

n	l	a_l	b_l	f_{0l}/f_0	Q_l
10	1	1,0215	0,2650	1,264	0,50
	2	0,9393	0,2549	1,412	0,54
	3	0,7815	0,2351	1,780	0,62
	4	0,5604	0,2059	2,479	0,81
	5	0,2883	0,1665	3,466	1,42
Filtry Butterwortha					
1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,4142	1,0000	1,000	0,71
3	1	1,0000	0,0000	1,000	—
	2	1,0000	1,0000	1,272	1,00
4	1	1,8478	1,0000	0,719	0,54
	2	0,7654	1,0000	1,390	1,31
5	1	1,0000	0,0000	1,000	—
	2	1,6180	1,0000	0,859	0,62
	3	0,6180	1,0000	1,448	1,62
6	1	1,9319	1,0000	0,676	0,52
	2	1,4142	1,0000	1,000	0,71
	3	0,5176	1,0000	1,479	1,93
7	1	1,0000	0,0000	1,000	—
	2	1,8019	1,0000	0,745	0,55
	3	1,2470	1,0000	1,117	0,80
	4	0,4450	1,0000	1,499	2,25
8	1	1,9616	1,0000	0,661	0,51
	2	1,6629	1,0000	0,829	0,60
	3	1,1111	1,0000	1,206	0,90
	4	0,3902	1,0000	1,512	2,56
9	1	1,0000	0,0000	1,000	—
	2	1,8794	1,0000	0,703	0,53
	3	1,5321	1,0000	0,917	0,65
	4	1,0000	1,0000	1,272	1,00
	5	0,3473	1,0000	1,521	2,88
10	1	1,9754	1,0000	0,655	0,51
	2	1,7820	1,0000	0,756	0,56
	3	1,4142	1,0000	1,000	0,71
	4	0,9080	1,0000	1,322	1,10
	5	0,3129	1,0000	1,527	3,20
Filtry Czebyszewa o falistości 0,5 dB					
1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,3614	1,3827	1,000	0,86
3	1	1,8636	0,0000	0,537	—
	2	0,6402	1,1931	1,335	1,71
4	1	2,6282	3,4341	0,538	0,71
	2	0,3648	1,1509	1,419	2,94
5	1	2,9235	0,0000	0,342	—
	2	1,3025	2,3534	0,881	1,18
	3	0,2290	1,0833	1,480	4,54
6	1	3,8645	6,9797	0,360	0,68
	2	0,7528	1,8573	1,078	1,81
	3	0,1589	1,0711	1,495	6,51
7	1	4,0211	0,0000	0,249	—
	2	1,8729	4,1795	0,645	1,09
	3	0,4861	1,5676	1,208	2,58
	4	0,1156	1,0443	1,517	8,84
8	1	5,1117	11,9607	0,276	0,68
	2	1,0639	2,9365	0,844	1,61
	3	0,3439	1,4206	1,284	3,47
	4	0,0885	1,0407	1,521	11,53

n	i	a_i	b_i	f_{oi}/f_o	Q_i
9	1	5,1318	0,0000	0,195	—
	2	2,4283	6,6307	0,506	1,06
	3	0,6839	2,2908	0,989	2,21
	4	0,2559	1,3133	1,344	4,48
	5	0,0695	1,0272	1,532	14,58
10	1	6,3648	18,3695	0,222	0,67
	2	1,3582	4,3453	0,689	1,53
	3	0,4822	1,9440	1,091	2,89
	4	0,1994	1,2520	1,381	5,61
	5	0,0563	1,0263	1,533	17,99

Filtry Czebyszewa o falistości 1 dB

1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,3022	1,5515	1,000	0,96
3	1	2,2156	0,0000	0,451	—
	2	0,5442	1,2057	1,353	2,02
4	1	2,5904	4,1301	0,540	0,78
	2	0,3039	1,1697	1,417	3,56
5	1	3,5711	0,0000	0,280	—
	2	1,1280	2,4896	0,894	1,40
	3	0,1872	1,0814	1,486	5,56
6	1	3,8437	8,5529	0,366	0,76
	2	0,6292	1,9124	1,082	2,20
	3	0,1296	1,0766	1,493	8,00
7	1	4,9520	0,0000	0,202	—
	2	1,6338	4,4899	0,655	1,30
	3	0,3987	1,5834	1,213	3,16
	4	0,0937	1,0423	1,520	10,90
8	1	5,1019	14,7608	0,276	0,75
	2	0,8916	3,0426	0,849	1,96
	3	0,2806	1,4334	1,285	4,27
	4	0,0717	1,0432	1,520	14,24
9	1	6,3415	0,0000	0,158	—
	2	2,1252	7,1711	0,514	1,26
	3	0,5624	2,3278	0,994	2,71
	4	0,2076	1,3166	1,346	5,53
	5	0,0562	1,0258	1,533	18,03
10	1	6,3634	22,7468	0,221	0,75
	2	1,1399	4,5167	0,694	1,86
	3	0,3939	1,9665	1,093	3,56
	4	0,1616	1,2569	1,381	6,94
	5	0,0455	1,0277	1,532	22,26

Filtry Czebyszewa o falistości 2 dB

1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,1813	1,7775	1,000	1,13
3	1	2,7994	0,0000	0,357	—
	2	0,4300	1,2036	1,378	2,55
4	1	2,4025	4,9862	0,550	0,93
	2	0,2374	1,1896	1,413	4,59
5	1	4,6345	0,0000	0,216	—
	2	0,9090	2,6036	0,908	1,78
	3	0,1434	1,0750	1,493	7,23
6	1	3,5880	10,4648	0,373	0,90
	2	0,4925	1,9622	1,085	2,84
	3	0,0995	1,0826	1,491	10,46
7	1	6,4760	0,0000	1,154	—
	2	1,3258	4,7649	0,665	1,65
	3	0,3067	1,5927	1,218	4,12
	4	0,0714	1,0384	1,523	14,28

n	i	a_i	b_i	f_{oi}/f_a	Q_i
8	1	4,7743	18,1510	0,282	0,89
	2	0,6991	3,1353	0,853	2,53
	3	0,2153	1,4449	1,285	5,58
	4	0,0547	1,0461	1,518	18,69
9	1	8,3198	0,0000	0,120	—
	2	1,7299	7,6580	0,522	1,60
	3	0,4337	2,3549	0,998	3,54
	4	0,1583	1,3174	1,349	7,25
	5	0,0427	1,0232	1,536	23,68
10	1	5,9618	28,0376	0,226	0,89
	2	0,8947	4,6644	0,697	2,41
	3	0,3023	1,9858	1,094	4,66
	4	0,1233	1,2614	1,380	9,11
	5	0,0347	1,0294	1,531	29,27
<i>Filtry Czebyszewa o falistości 3 dB</i>					
1	1	1,0000	0,0000	1,000	—
2	1	1,0650	1,9305	1,000	1,30
3	1	3,3496	0,0000	0,299	—
4	2	0,3559	1,1923	1,396	3,07
	1	2,1853	5,5339	0,557	1,08
5	2	0,1964	1,2009	1,410	5,58
	1	5,6334	0,0000	0,178	—
6	2	0,7620	2,6530	0,917	2,14
	3	0,1172	1,0686	1,500	8,82
	1	3,2721	11,6773	0,379	1,04
7	2	0,4077	1,9873	1,086	3,46
	3	0,0815	1,0861	1,489	12,78
	1	7,9064	0,0000	0,126	—
8	2	1,1159	4,8963	0,670	1,98
	3	0,2515	1,5944	1,222	5,02
	4	0,0582	1,0348	1,527	17,46
	1	4,3583	20,2948	0,286	1,03
9	2	0,5791	3,1808	0,855	3,08
	3	0,1765	1,4507	1,285	6,83
	4	0,0448	1,0478	1,517	22,87
	1	10,1759	0,0000	0,098	—
10	2	1,4585	7,8971	0,526	1,93
	3	0,3561	2,3651	1,001	4,32
	4	0,1294	1,3165	1,351	8,87
	5	0,0348	1,0210	1,537	29,00
	1	5,4449	31,3788	0,230	1,03
10	2	0,7414	4,7363	0,699	2,94
	3	0,2479	1,9952	1,094	5,70
	4	0,1008	1,2638	1,380	11,15
	5	0,0283	1,0304	1,530	35,85

Tablica 14.7. Wewnętrzne wzmocnienie w filtrze z pojedynczym dodatnim sprzężeniem zwrotnym

α	Tłumienie krytyczne	Filtry			Drgania samowzbudne
		Bessela	Butterwortha	Czebyszewa (3 dB)	
	1,000	1,268	1,586	2,234	3,000